Potenzreihen-Entwicklung für Sinus und Cosinus

Man geht aus von: $\cos(x) < 1$ (für $x \neq 2n\pi$)

Also gilt auch $\int_0^b \cos(x)\,dx < \int_0^b 1\,dx$ (für $b > 0$)

$\Leftrightarrow \left[\sin(x)\right]_0^b < \left[x\right]_0^b$

$\Leftrightarrow \sin(b) - 0 < b$

Umbenennen $\sin(x) < x$

Integration $\int_0^b \sin(x)\,dx < \int_0^b x\,dx$

$\left[-\cos(x)\right]_0^b < \left[\frac{1}{2}x\right]_0^b$

$-\cos b + 1 < \frac{1}{2}b^2$

$\Leftrightarrow \cos(b) > 1 - \frac{1}{2}b^2$

Umbenennen: $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

Integration $\int_0^b \cos(x)\,dx > \int_0^b \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx$

$\left[\sin(x)\right]_0^b > \left[x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3\right]_0^b$

$\sin(b) > b - \frac{1}{2\cdot 3}b^3$

Umbenennen $\sin(x) > x - \frac{1}{3!}x^3$

$\left[-\cos(x)\right]_0^b > \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4!}x^4\right]_0^b$

$-\cos(b) + 1 > \frac{1}{2}b - \frac{1}{4!}b^4$

$\cos(b) < 1 - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4!}b^4$

Integr. $\left[\sin(x)\right]_0^b < \left[x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{5!}x^5\right]_0^b$

$\sin(b) < b - \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{5!}b^5$

Umbenenn. $\sin(x) < x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$

$x - \frac{1}{3!}x^3 < \sin(x) < x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$ u.s.w

Linke und Rechte Seite der Doppelungleichung unterscheiden sich um $\frac{1}{5!}x^5$ bzw $\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Dieser Quotient geht im Grenzwert $n \to \infty$ nach 0, weil n irgendwann jedes noch so große x übersteigt

Somit wird $\sin(x)$ zwischen rechter und linker Seite „eingequetscht"

Also: $\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots}$

$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}}$

$\left(\sin'(x) = \cos(x)\right)$

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ (n Fakultät)